

3. Prvočísla a čísla složená

PRIROZENÁ ČÍSLA > 1 rozdělujeme podle počtu dělitelů na

- PRVOČÍSLA: mají PŘÁVĚ 2 DĚLITELE (1 a sebe sama)

- NEJMENŠÍ: 2 (jediné sudé)

- prvočíslo menší než 100 je 25 (viz tabulky nebo Eratosthenovo síto)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

- ČÍSLA SLOŽENÁ: mají ASPOŇ 3 RŮZNÉ DĚLITELE

- NEJMENŠÍ: 4

ČÍSLO 1 nepatříme ani na prvočíslo, ani na číslo složené

Pr. Ukaž všechny dělitele čísel

a) 48

(1. zp.) TABULKOVÝ

48	14	16	12	8
1	2	3	4	6

(2. zp.)

48
1 48
2 24
3 16
4 12
6 8

(3. zp.)

$$48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

$$D(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

b) 36

36	18	12	9	6
1	2	3	4	6

c) 60

60	30	20	15	12	10
1	2	3	4	5	6

$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

PRVOČÍSELNÝ ROZKLAD SLOŽENÉHO ČÍSLA

- napíš ve tvaru součinu prvočísel (NEPÍŠE 1 a dané číslo)

$$Pr. 36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

ZÁKLADY MOCNIN VZESTUPNĚ

=> JEDNOZNAČNOST PŮVÝMEN
(viz následující věta)

JINÉ ZÁPISY

$$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

36:	2	1
18:	2	1
9:	3	1
3:	3	1
1:	0	0

ZÁKLADNÍ VĚTA ARITHMETIKY

Každé přirozené číslo $n > 1$ lze napísat jediným způsobem ve tvaru

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_k^{k_k}$$

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ PRVOČÍSLA

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_k$ EXPONENTY - PRÍROZ. ČÍSLA

- při hledání prvočíselného rozkladu využíváme následující větu

VĚTA

Každé složené číslo n je dělitelné alespoň jedním prvočíslem $p \leq \sqrt{n}$ (tj. je-li n složené číslo, pak je dělitelné alespoň jedním prvočíslem $p \leq \sqrt{n}$)

Pr. Rozhodni, zda jde o prvočíslo

a) 943

$\sqrt{943} \approx 30,7 \Rightarrow$ má-li být číslo dělitelné prvočísly menšími než 31, tj. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

2, 3, 5 - pravidla dál dělení písmem, na kalkulačce	7: $943:7 = 134$	$943:11 = 85$	$943:13 = 72$	$943:17 = 55$
	$\begin{array}{r} 24 \\ 33 \\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 63 \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 33 \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 93 \\ 8 \end{array}$
	$943:19 = 49$	$943:23 = 41 \rightarrow$ je děl. 23		
	$\begin{array}{r} 183 \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ 0 \end{array}$		

$\Rightarrow 943 = 23 \cdot 41 \Rightarrow$ 943 je číslo složené

b) 349

$\sqrt{349} \approx 18,7 \Rightarrow$ má-li být číslo dělitelné prvočísly < 19

tj. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 $\Rightarrow$ žádné není dělitelem 349

$349:7 = 49$	$349:11 = 31$	$349:13 = 26$	$349:17 = 20$
$\begin{array}{r} 69 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19 \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 89 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 09 \\ 9 \end{array}$

$\Rightarrow$ 349 je PRVOČÍSLO

VĚTA (obměňová k předchozí větě)

$a \Rightarrow b$ obm. $1b \Rightarrow 1a$

Pokud přirozené číslo $n > 1$ NENÍ DĚLITELNÉ ŽÁDNÝM PRVOČÍSLEM $p \leq \sqrt{n}$, pak n je PRVOČÍSLO (tj. není složené).

Příklady

① Kapiš prvočíselný rozklad čísel

a) $42 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

jiný způsob $\begin{array}{l|l} 42 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \text{KONEC} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l|l} 42 \\ 36 \\ 18 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array}} \right\} 42 = 2^3 \cdot 3^2$

$42 = 2 \cdot 36 = 2^3 \cdot 3^2$
 $\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \cdot 6 \cdot 6 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}$

b) $210 = 21 \cdot 10 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

c) $495 = 5 \cdot 99 = 5 \cdot 9 \cdot 11 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

d) $360 = 36 \cdot 10 = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

e) $4410 = 441 \cdot 10 = 3 \cdot 147 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

ERATOSTHENOVO SÍTO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Erastosthenes
(asi 275-195 př. n. l.)
- řecký matematik a astronom,
okolo roku 240 př. n. l.
se pokusil vypočítat
poloměr Země, využil
metodu na měření
přímky, která se
nazývá Erastosthenovo
síto

- prvočísel menších než 100 je (25)

- jsou to: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43

47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

ZAJÍMAVOSTI

- DIKONALÉ ČÍSLO: přív. číslo, které se normou součtem svých dělitelů,
které jsou od něho odlišné (kromě vlastních dělitelů)

6 dělitelé (≠6): 1, 2, 3 $1+2+3=6$ např. 1196

28 dělitelé (≠28): 1, 2, 4, 7, 14 $1+2+4+7+14=28$ 8128

(dnes je jich známo 26)

- PRVOČÍSELNÁ DVOJČATA: prvočíslo p , $p+2$

3, 5 5, 7 11, 13 17, 19 29, 31 ...

společný dělitel čísel křivších mezi nimi je pro $p > 4$ dělitelný 6

- SPRÁTELELNÁ ČÍSLA: 2 různá přirozená čísla a , b taková, že
součet všech vlastních dělitelů čísla a se rovná číslu b
a naopak, součet všech vlastních dělitelů čísla b se rovná
číslu a

220, 284

220	110	55	44	22	20
1	2	4	5	10	11

284	142	71
1	2	4

220: $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

284: $1+2+4+71+142=220$

(dále např. 17296 a 18416)

mnohačetnými jsou dělitelé
čísla 220

② rozhodnutí co nejúčinněji, která k číslu jsou prvočísla

20
5.22

a) 667:

$$(p \leq \sqrt{667})$$

$$\sqrt{667} = 25,8 \Rightarrow \text{největ. dělit. prvočísla } 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \textcircled{23}$$

$$\Rightarrow 667 \text{ je dělitelné prvočíslem } 23, \quad 667 = 23 \cdot 29 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{667 \text{ NENÍ PRVOČÍSLO, je číslo SLOŽENÉ}}$$

b) 677:

$$\sqrt{677} = 26,02 \Rightarrow \text{největ. dělitelnost prvočísly } p \leq \sqrt{677}, \text{ tj.}$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \Rightarrow 677 \text{ není dělit. } p \leq \sqrt{677}$$

$$\Rightarrow \underline{677 \text{ je PRVOČÍSLO}}$$

c) 439:

$$\sqrt{439} = 20,95 \Rightarrow \text{největ. dělitelnost prvočísly } p \leq 20,95, \text{ tj.}$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \Rightarrow 439 \text{ není dělitelné } p \leq \sqrt{439}$$

$$\Rightarrow \underline{439 \text{ je PRVOČÍSLO}}$$

d) 1591:

$$\sqrt{1591} = 39,9 \Rightarrow \text{největ. dělitelnost prvočísly } p \leq \sqrt{1591}, \text{ tj.}$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \textcircled{37}, 39$$

$$\Rightarrow 1591 = 37 \cdot 43 \Rightarrow 1591 \text{ NENÍ PRVOČÍSLO, je číslo SLOŽENÉ}$$

③ úprava na kladné strany

20
5.23

$$a) \frac{91}{104} = \frac{13 \cdot 7}{2 \cdot 52} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 13} = \frac{7}{8}$$

$$[\sqrt{91} = 9,5 \Rightarrow p: 2, 3, 5, \textcircled{7}]$$

$$b) \frac{1825}{3200} = \frac{5 \cdot 365}{32 \cdot 100} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 73}{4 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 73}{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{73}{128}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1825 : 5 = 365 \\ 32 \\ 25 \end{array} \right]$$

$$c) \frac{696}{2088} = \frac{2 \cdot 348}{2 \cdot 1044} = \frac{174 \cdot 2}{522 \cdot 2} = \frac{87 \cdot 2}{261 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 29}{3 \cdot 87} = \frac{29 \cdot 1}{3 \cdot 29} = \frac{1}{3}$$